

فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید.

- ۱- بازه (a, b) یک همسایگی راست b است. (.....)
- ۲- بازه $(b, -)$ یک همسایگی چپ b است. (.....)
- ۳- مجموعه $\{b\}$ - (a, b) یک همسایگی b است. (.....)
- ۴- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^b}$ برابر ∞ است. (.....)
- ۵- حد تابع $\left[\frac{1}{x}\right]$ وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند برابر -1 است.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

- ۱- حد تابع $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^b + 1}$ برابر با است.
- ۲- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $5 + 12x^b + x^{10}$ بر $(x - 2)$ برابر است.
- ۳- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sin x}$ برابر است.

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

- ۱- چند جمله ای $f(x) = x^b + 12x^{10} + 1$ را در نظر بگیرید:
 - الف) آیا $f(x)$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است؟
 - ب) $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.
- ۲- نشان دهید چند جمله ای $f(x) = 10x - 12x^b + 5x^{10} + 1$ بر دو جمله ای $(x + 2)$ بخش پذیر است.
- ۳- مقدار m را طوری پیدا کنید که چندجمله ای $f(x) = x^b + mx^{10} + 12x - 6$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر باشد.
- ۴- باقی مانده تقسیم چندجمله ای $f(x) = x^{100} + x^{50} + x^{10} + x^5 + x^1$ بر $(x + 1)$ را پیدا کنید.
- ۵- حاصل عددهای زیر را بدست آورید. گروه آموزشی عصر

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - 1}{x^b + x - 2} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{12x^{10} + 12x^b + 12}{x^b + 1} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{x-1}}{x-5} =$

www.my-dars.ir

$$ت) \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[p]{x} - \nu}{x^\nu - \gamma x - \lambda} =$$

۶- حاصل‌عدهای زیر را بدست آورید.

$$الف) \lim_{x \rightarrow \delta^+} \frac{\nu x}{x - \delta} =$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow \nu^+} \frac{x^\nu + x - \delta}{\nu - x} =$$

$$پ) \lim_{x \rightarrow \nu^-} \frac{\nu x^\nu - \rho}{\nu - x} =$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{|x| - 1}{|x - \nu|} =$$

$$ث) \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^\nu - \kappa x + \iota}} =$$

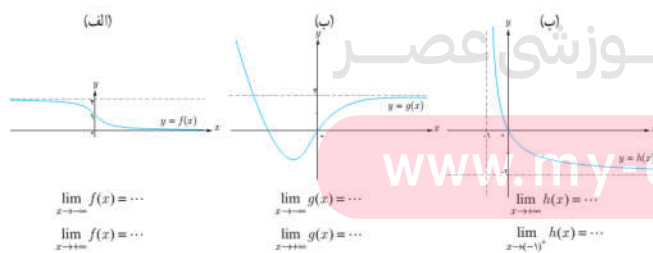
$$ج) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{\kappa x^\nu - \kappa x + 1} =$$

$$د) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu + x - \nu}{x^\nu - \mu x^\nu + \nu x - 1} =$$

$$ه) \lim_{x \rightarrow \nu^-} \frac{[x] - \nu}{x - \nu} =$$

$$و) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{\nu}} \frac{1}{\cos x} =$$

$$ز) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{\nu}} \tan x =$$



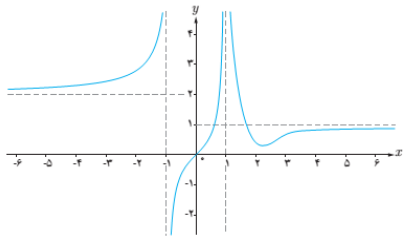
۷- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.mydars.ir

۸- با توجه به نمودار، حدود فواصلته شده را بنویسید.



- الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$
 ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 ث) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

۹- حدود زیر را مناسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a + \frac{\gamma}{x^\mu} \right) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu + \frac{1}{x^\mu}}{\frac{\nu}{x} - \delta} =$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu x^\mu - \nu x + 1}{x^\mu + \delta x - \mu} =$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\epsilon x^\mu + \gamma x - a}{\mu x^\mu - \nu x^\mu + x} =$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^\delta - \epsilon x^\mu - x}{x^\mu - \delta x + 1} =$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\mu} x^\mu + \gamma x^\mu - \epsilon \right) =$

۱۰- اگر $\mu = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + \nu x^\mu + 1}{\mu x^\mu - x^\mu + \delta}$ باشد، حاصل $a + n$ را پیدا کنید.

۱۱- اگر $\mu = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{\nu} f(x) = \frac{ax^\mu - \mu x + \nu}{\mu x^\mu + x - \mu}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را پیدا کنید.

۱۲- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود فواصلته شده را بدست آورید.

www.my-dars.ir

الف) $f(x) = x^\mu - 1$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ ،
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$

ب) $g(x) = \begin{cases} \mu x + 1, & x > 0 \\ \mu, & x < 0 \end{cases}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$

پاسخنامه فصل سوم : حد بی نهایت و حد در بی نهایت

جملات درست را با (ص) و جملات نادرست را با (غ) مشخص کنید

۱- (ص)

۲- (غ)

۳- (ص)

۴- (ص)

۵- (ص)

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

۱- صفر

۲- ۱۱

۳- یک

به سوالات زیر پاسخ کامل دهید.

۱- پند جمله ای $f(x) = \nu x^{\nu} + x^{\nu} + 1$ را در نظر بگیرید:

الف) بخش پذیر است $f(-1) = \nu(-1)^{\nu} + (-1)^{\nu} + 1 = 0$

ب) $f(x) = (x+1)(\nu x^{\nu} - x + 1)$

ن- نشان دهید پند جمله ای $f(x) = \nu x^{\nu} + 5x^{\nu} - 13x - 10$ بر دو جمله ای $(x+\nu)$ بخش پذیر است.

$$x + \nu = 0 \rightarrow$$

$$x = -\nu : f(-\nu) = \nu(-\nu)^{\nu} + 5(-\nu)^{\nu} - 13(-\nu) - 10 = -16 + 10 + 6 - 10 = 0$$

۳- مقدار m را طوری پیدا کنید که پندجمله ای $f(x) = x^{\nu} + mx^{\nu} + 14x - 6$ بر $(x-\nu)$ بخش پذیر باشد.

$$x - \nu = 0 \rightarrow x = \nu : f(\nu) = (\nu)^{\nu} + m(\nu)^{\nu} + 14(\nu) - 6 = 0 \rightarrow 1 + 14m + 14 - 6 = 0 \rightarrow 10 + 14m = 0$$

$$\rightarrow m = -\frac{10}{14}$$

۴- باقی مانده تقسیم پندجمله ای $f(x) = x^{10} + x^{5} + x^{\nu} + x^{10} + x^{5}$ بر $(x+1)$ را پیدا کنید.

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 : f(-1) = (-1)^{10} + (-1)^{5} + (-1)^{\nu} + (-1)^{10} + (-1)^{5} = 1$$

۵- حاصل جدایه های زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\nu} - 1}{x^{\nu} + x - \nu} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+\nu)(x-1)} = \frac{\nu}{1+\nu}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-\nu)} \frac{\nu x^{\nu} + 13x^{\nu} + 14}{x^{\nu} + 11} = \lim_{x \rightarrow (-\nu)} \frac{(x+\nu)(\nu x^{\nu} - x + \nu)}{(x+\nu)(x^{\nu} - \nu x + 11)} = \frac{\nu}{11} = 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\nu - \sqrt{x-1}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\nu - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{\nu + \sqrt{x-1}}{\nu + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\nu^2 - (x-1)}{(x-5)(\nu + \sqrt{x-1})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(\nu + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{\nu + \sqrt{x-1}} = -\frac{1}{\nu}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[p]{x} - \nu}{x^\nu - \nu x - \lambda} &= \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{\sqrt[p]{x} - \nu}{x^\nu - \nu x - \lambda} \times \frac{\sqrt[p]{x^\nu} + \nu \sqrt[p]{x} + \nu}{\sqrt[p]{x^\nu} + \nu \sqrt[p]{x} + \nu} = \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{x - \lambda}{(x - \lambda)(x - \nu)(\sqrt[p]{x^\nu} + \nu \sqrt[p]{x} + \nu)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{1}{(x - \nu)(\sqrt[p]{x^\nu} + \nu \sqrt[p]{x} + \nu)} = \frac{1}{\nu \times (\nu + \nu + \nu)} = \frac{1}{3\nu} \end{aligned}$$

۶- حاصل نهادهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{\nu x}{x - \infty} = \frac{\nu \times \infty}{\infty^+ - \infty} = \frac{+\infty}{\infty^+} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \nu^+} \frac{x^\nu + x - \infty}{\nu - x} = \frac{\nu^\nu + \nu - \infty}{\nu - \nu^+} = \frac{+\infty}{\infty^-} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \nu^-} \frac{\nu x^\nu - \infty}{\nu - x} = \frac{\nu(\nu)^\nu - \infty}{\nu - \nu^-} = \frac{-\infty}{\infty^+} = -\infty$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{|x| - 1}{|x - \nu|} = \frac{|\nu| - 1}{|\nu - \nu|} = \frac{+1}{\infty^+} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{ث) } \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^\nu} - \nu x + \nu} &= \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-\nu)^\nu}} = \lim_{x \rightarrow \nu} \frac{x - \sqrt{x-1}}{|x - \nu|} = \frac{\nu - \sqrt{\nu-1}}{|\nu - \nu|} = \frac{+1}{\infty^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{\nu x^\nu - \nu x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\nu}} \frac{[x] - \nu}{(\nu x - 1)^\nu} = \frac{\left[\frac{1}{\nu}\right] - \nu}{\left(\nu \times \frac{1}{\nu} - 1\right)^\nu} = \frac{-\nu}{\infty^+} = -\infty$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\nu + x - \nu}{x^\nu - \nu x^\nu + \nu x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + \nu)(x - 1)}{(x - 1)(x^\nu - \nu x + 1)} = \frac{+\nu}{\infty^+} = +\infty$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow \nu^-} \frac{[x] - \nu}{x - \nu} = \frac{[\nu^-] - \nu}{\nu^- - \nu} = \frac{\nu - \nu}{\infty^-} = \frac{-1}{\infty^-} = +\infty$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\nu}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi^+}{\nu}\right)} = \frac{1}{\infty^-} = -\infty$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\nu}^+} \tan x = \tan\left(\frac{\pi^+}{\nu}\right) = -\infty$$

۷- با توجه به نمودار توابع، حدود نواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nu, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \nu$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\nu, \quad \lim_{x \rightarrow (-)^+} h(x) = +\infty$$

۸- با توجه به نمودار، حدود نواسته شده را بنویسید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \nu$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-)^-} f(x) = +\infty \quad \text{و}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-)^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a + \frac{y}{x^p} \right) = a + \frac{y}{(-\infty)^p} = a + 0 = a$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p + \frac{1}{x^p}}{\frac{q}{x} - \delta} = \frac{p + \frac{1}{+\infty}}{\frac{q}{+\infty} - \delta} = \frac{p + 0}{0 - \delta} = \frac{p}{-\delta}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{px^p - qx + 1}{x^p + \delta x - p} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^p \left(p - \frac{q}{x} + \frac{1}{x^p} \right)}{x^p \left(1 + \frac{\delta}{x} - \frac{p}{x^p} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^p \left(p - \frac{q}{-\infty} + \frac{1}{+\infty} \right)}{x^p \left(1 + \frac{\delta}{-\infty} - \frac{p}{+\infty} \right)} = \frac{p - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{p}{1} = p$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-cx^p + \gamma x - a}{px^p - qx^p + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^p \left(-c + \frac{\gamma}{x} - \frac{a}{x^p} \right)}{x^p \left(p - \frac{q}{x} + \frac{1}{x^p} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^p \left(-c + \frac{\gamma}{+\infty} - \frac{a}{-\infty} \right)}{x^p \left(p - \frac{q}{-\infty} + \frac{1}{+\infty} \right)} = \frac{-c + 0 - 0}{p - 0 + 0} = \frac{-c}{p} = -\frac{c}{p}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px^\delta - cx^p - x}{x^p - \delta x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p \left(p - \frac{c}{x^p} - \frac{1}{x^p} \right)}{x^p \left(1 - \frac{\delta}{x} + \frac{1}{x^p} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p \left(p - \frac{c}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} \right)}{x^p \left(1 - \frac{\delta}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} \right)} = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p}x^p + \gamma x^p - c \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \left(-\frac{1}{p} + \frac{\gamma}{x} - \frac{c}{x^p} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{p}x^p = -\infty$

۱۰- اگر $p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + px^p + 1}{qx^q - x^p + \delta} = 11$ باشد، حاصل $a + n$ را پیدا کنید.

نکته ۱: چون حاصل عدد می باشد پس درجه صورت و مخرج یکسان است: $n=q$

نکته ۲: حاصل تقسیم ضریب بالاترین درجه صورت و ضریب بالاترین درجه مخرج که هم درجه هستند برابر 11 می باشد.

$$\frac{a}{p} = 11 \rightarrow a = 11q : a + n = 11q + q = 12q$$

گروه آموزشی عصر

۱۱- اگر $f(x) = \frac{ax^p - px + p}{px^p + x - p}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{p}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را پیدا کنید.

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{p} \rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1x^p - px + p}{px^p + x - p} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-p)}{(x-1)(px+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-p)}{(px+1)} = \frac{-1}{\delta}$$